

Comment

Matematici e musicisti, esploratori di *pattern*

Laura Tedeschini Lalli

Sono in molti a pensare che la matematica e la musica abbiano qualcosa in comune: lungo gli anni, mi è capitato più volte di sentirmi dire addirittura “matematica e musica sono la stessa cosa”. In realtà questa percepita comunanza è di per sé già sul piano dell’astrazione, giacché nessuno di noi penserebbe di poter confondere le due attività l’una con l’altra, se non altro per l’enorme differenza tra i materiali adoperati; la confusione avviene più comprensibilmente, a volte, tra altri ambiti culturali, come per la matematica e la fisica, o per la matematica e la statistica. Possiamo allora affermare che tra musica e matematica c’è stato, e continua ad esserci, un lungo *affair*, con reciproci amore, fascinazione, inevitabili influenze ed incomprensioni. Il rapporto è ancora vivo e fertile, e si potrebbe parlare di molti dei suoi aspetti e dei suoi frutti nell’uno e nell’altro campo. Alla gettonatissima domanda “Ma voi matematici, che fate?”, recentemente la nota matematica Lucia Caporaso ha risposto “Cerchiamo *pattern*; quando non li troviamo, ce li inventiamo.” Credo che questa descrizione fulminante sia profondamente condivisa da tutti. Su questo piano, certo astratto, è molto chiaro che anche i musicisti fanno “la stessa cosa”: cercano *pattern*, in un altro linguaggio, ne inventano e ne variano. Questo è dunque il fascino del rapporto matematica-musica: la creatività riconosciuta ad entrambe è nell’essere, entrambe, attività esplicitamente compositive, oltre che analitiche.

Accennerò in questo articolo ad alcuni episodi storici, scelti tra quelli che trovo tuttora problematici e stimolanti, cioè ancora di ispirazione per comporre nuovi pezzi di matematica o di musica.

Del film di Walt Disney “Paperino nel regno della Matematica”,¹ mi è sempre piaciuto l’inusitato inizio. Paperino, vestito da esploratore, con caschetto coloniale e fucile, si aggira cauto per un misterioso bosco i cui alberi hanno radici ...quadrate. Una voce fuori campo lo chiama, e lui sospettoso chiede: “Chi sei?”. La risposta della voce mi è sempre piaciuta: “Sono la Matematica, sono lo spirito dell’avventura!”. Da qui, la voce fuoricampo dello spirito dell’avventura guida Paperino in visita ad altri mondi, in cui la matematica è alla base degli umani costrutti e della natura..., cominciando dal rapporto matematica-musica, naturalmente, e dai Pitagorici. Cominceremo dunque anche noi da qua: se è in un film di Walt Disney vuol dire che è ormai patrimonio comune della nostra cultura; vedremo però in che senso questi esperimenti sul suono, che chiaramente di per sé non sono né musica né matematica, hanno avuto una profonda influenza sulla pratica di entrambe.

Nell’antica Grecia, lo “spirito dell’avventura” mostra a Paperino i Pitagorici che misurano la lunghezza di corde tese, ascoltandone i suoni: “scoprono” così la scala musicale, e si mettono a suonare. Lo spirito osserva allora: “Vedi Paperino, senza matematica, niente musica!”. Ohibò, aggiungo io: questa non è solo una grossa esagerazione, è anche una sciocchezza (peraltro l’unica mai notata in quel film, visto più e più volte)! E’ una sciocchezza storica ed antropologica, non matematica: la musica ovviamente già esisteva, e non aveva avuto bisogno di altro se non dei propri suoni, dell’orecchio e dell’apparato cognitivo umani per giudicarli, per riprodurli, per ricomporli; la matematica, invece, stava nascendo allora. Possiamo casomai affermare l’opposto, che la matematica, cioè, nasce in parte ispirata dalla musica: si percepisce un ordine con l’orecchio, se ne cercano dei termini descrittivi con la matematica. Questo a tuttora è per me il perno del rapporto tra matematica e musica: esploratori di *patterns*. Se guardiamo meglio cosa si attribuisce ai pitagorici, peraltro, esso è di straordinaria modernità sul piano strettamente matematico, e certamente ispirato dalla musica. La descrizione pitagorea della “scala musicale” ha infatti proposto la prima astrazione di questo concetto,² fornendone un modello di misurazione e poi un possibile metodo approssimazione. L’orecchio percepisce una certa “distanza” se ascolta due suoni diversi, eseguiti però da uno stesso strumento intonabile, ad esempio una chitarra. Questa distanza percepita si chiama oggi “intervallo” tra le due note. La prima astrazione consiste nel

ritenere che gli intervalli musicali siano misurabili, e che una scala musicale sia un insieme di note ordinate, che formano tra loro certi intervalli. Lo studio prosegue in senso estremamente moderno, proponendosi di descrivere le grandezze in esame, gli intervalli della scala musicale, a partire da un insieme di due di esse (l'intervallo di ottava e l'intervallo di quinta), con un metodo di approssimazione, e fornendone quando possibile gli errori (il "comma pitagorico"). Questo è moderno per due motivi, uno matematico ed uno musicale: quello matematico è lo stendere un programma di descrizione "in approssimazione" di un insieme di grandezze; quello musicale è il guardare agli intervalli come i costituenti di una scala (piuttosto che "le note"), e soprattutto, diremmo oggi, postulare che esista un alfabeto (discreto e finito) della musica, e stabilirne gli elementi. O diremmo ancora, definire la scala come una segmentazione finita del continuum di altezze possibili, e connettere la sua descrizione alla segmentazione finita del continuum di lunghezze possibili di una corda data. Uno dei problemi, oggi come ieri, è nell'immaginare che di tali segmentazioni ne sia possibile o naturale solo una, mentre come vedremo tra breve le scale musicali usate al mondo sono tante, tutte giudicate da orecchi collettivi, e dunque sia culturali che naturali, e non si sono a tutt'oggi trovati "universali" completi del sistema.

La misurabilità degli intervalli, infatti, segue l'osservazione sperimentale che le distanze percepite tra note suonate da una corda tesa, dipendono dai rapporti tra le lunghezze delle corde.³ Questa scelta è talmente influente che ancora oggi, nello scrivere questo articolo, non sono in grado di dare una definizione di "intervallo musicale" (che ovviamente sarebbe necessaria) che non sia già permeata dell'ipotesi primaria che le note musicali siano, appunto, frequenze stabili e misurabili. La scelta è peraltro talmente legata allo strumento ed alle sue caratteristiche fisiche, che poco sopra ho dovuto adoperare il termine "intonabile", che in realtà in italiano è "accordabile", con evidente imprinting lessicale dallo strumento che funziona da modello per tutti gli altri analoghi: la corda tesa.

L'esperimento, per quanto riguarda le corde, consisteva nel suonare corde tese di diversa lunghezza, ma per il resto uguali, osservando che a corde di lunghezza doppia, dunque in rapporto 2:1, corrispondevano intervalli che oggi chiameremmo "di ottava", e a corde di lunghezza in rapporto 3:2 corrispondevano suoni che oggi chiameremmo "in quinta". L'idea è stata quella di sovrapporre moltiplicazioni per 3 e divisioni per 2, in modo da dividere la corda data (di lunghezza 2 rispetto a quella di paragone) in segmenti che suonano via via molto simili alle note di certe scale musicali. Ci si ferma quando il risultato è molto vicino a 2, il che avviene dopo 12 operazioni di questo tipo. La differenza finale rappresenta l'errore di approssimazione dell'intervallo di ottava ottenuto con questo metodo, e si chiama "comma pitagorico". Questo errore è necessario ed insito nel metodo, e dunque accordando uno strumento "per quinte", non si possono avere ottave "esatte".⁴

L'osservazione matematica è dunque che componendo rapporti del tipo $2^\alpha 3^\beta$, al variare di α e β tra i numeri interi, si generano topologicamente *tutti* i numeri reali, nel senso che possiamo approssimare qualunque numero reale con la precisione che vogliamo. Questa è una visione moderna della cosa: certamente allora non esistevano i numeri reali; però esisteva, e questa ne è una delle prove, il programma di approssimare numeri (un insieme infinito di essi) con un insieme ristretto (e finito) di altri numeri. La scelta dei numeri 2 e 3 è dovuta sia al fatto aritmetico (sono i primi), sia agli intervalli musicali percepiti in corrispondenza, che sono particolarmente forti e stabili se suonati da uno strumento a corde. Oggi sappiamo che questo ha motivi fisici, strettamente legati all'unidimensionalità della corda ed alla sua elasticità; certamente l'orecchio abituato a suoni di corde tese riconosce con facilità l'intervallo "di quinta", nel senso che lo riproduce con facilità ed esattezza. L'intervallo "di ottava" è ancora più riconoscibile, oltre che nelle corde tese: è l'intervallo che nella stragrande maggioranza delle culture musicali, viene intonato naturalmente da uomini e donne quando pensano di cantare la stessa nota. Dunque in una cultura abituata a suoni di corde tese (e a suoni di canne vuote, che seguono la stessa struttura di vibrazione), questi due intervalli sono facili da riprodurre e quindi da giudicare e riconoscere ad orecchio, ed è anche facile misurarne una variabile: nel caso dei pitagorici, il rapporto tra le lunghezze della corda che li emette. Per capire che questo è in sé un programma interamente matematico, basti pensare ad altri analoghi programmi che si sono dipanati lungo i secoli, prima di giungere ad assetti definitivi: la comprensione di quali grandezze siano costruibili con riga e compasso, o quello odierno necessariamente legato alla struttura dei calcolatori, di approssimare tutto a partire da un insieme di 0 ed 1.

Da allora impostato, il problema della descrizione rigorosa di una "scala musicale", è rimasto aperto. Ogni epoca si è cimentata, con la matematica che aveva a disposizione, a fornire modelli che dessero

ragione della evidente ripetibilità di una scala musicale. La questione è talmente problematica nei suoi contorni, negli oggetti di indagine, e nelle metodologie adatte, che è di fatto ancora aperta. Segno della sua problematicità è ad esempio il tentativo, alla fine del XIX secolo, di catalogare sistematicamente le scale musicali di altre culture; un tentativo destinato all'insuccesso, come vedremo, ma divenuto fertilissimo banco di prova sperimentale di nuove discipline.

Nel 1870 usciva la terza versione del fondamentale libro di Helmholtz *On the Sensation of Tone*,⁵ che proponeva modelli fisici e fisiologici a spiegazione della genesi delle scale musicali. La novità era, allora e tuttora, nel cercare nell'apparato uditivo umano la capacità di riconoscere la somiglianza di suoni. Il suo traduttore inglese, Ellis, affrontò poi sistematicamente l'obiettivo di descrivere scale musicali di culture diverse, visto che anch'esse si propagano per via di orecchio umano, concludendo però che la teoria proposta da Helmholtz non era lontanamente sufficiente ad accoglierne la varietà, neanche a fini di catalogazione:

The final conclusion is that the Musical Scale is not one, not “natural”, nor even founded necessarily on the laws of constitution of musical sound so beautifully worked out by Helmholtz, but very diverse, very artificial, and capricious.⁶

A questa osservazione si suole far risalire la nascita del settore di studi dell'Etnomusicologia, cioè della musica nel suo contesto culturale. Certamente, sappiamo che ascoltare musiche di altre culture vuol dire avere a che fare anche con alfabeti diversi; e a volte diversi anche per natura, magari non fatti di note. Per quanto riguarda Ellis, c'è da ricordare che i suoi studi furono estremamente sistematici, compiuti in un ambiente che aveva a disposizione strumenti provenienti dai possedimenti dell'impero Britannico, così come l'esigenza di classificare quegli strumenti.

Veniamo ai nostri giorni, alla matematica ed alla musica viventi, in trasformazione e crescita oggi; il materiale sonoro usato in genere è duttile e variegato, ben lontano dalla tematica della scala. Abbiamo una messe di dati, spesso in forma numerica perché rilevati da strumenti digitali; abbiamo alcuni modi di studiarli, anche quando sono relativi a “serie storiche”, cioè rilevati lungo il tempo; sappiamo bene che ancora le teorie non danno conto di tutte le regolarità che si presentano, e della loro varietà; l'orecchio umano, in questo comprendendo tutto l'apparato cognitivo ad esso connesso, è un formidabile detector di regolarità, ed agisce in tempo reale, mentre il flusso di informazioni entra. Si sta sviluppando una comunità di persone che “sonificano” dati, cioè li codificano in suoni: siamo tutti abituati ai grafici, ed alla selezione di caratteristiche che necessariamente implicano, è stato naturale sviluppare una rappresentazione temporale, la cui decodifica è affidata all'orecchio. Questa attività sta avendo implicazioni sia per i musicisti, che per i matematici, esattamente per l'identica ragione che entrambi trovano attraverso l'altra codifica nuove coerenze e nuove fonti di ispirazione per la loro attività di cercatori e creatori di pattern. Inoltre ora il rapporto vede interagire anche direttamente scienziati e musicisti, cosa che prima raramente avveniva.

Tra i primi ad utilizzare la sonificazione di dati sono stati gli astronomi; in rete all'indirizzo web http://www.jpl.nasa.gov/jupiterflyby/gallery/gl_pages/tpws_release5.html si trova ad esempio la sonificazione delle onde rilevate dalla sonda Cassini nel suo avvicinamento a Giove; sono onde nel gas sottile di particelle cariche che riempie lo spazio tra il Sole ed i suoi pianeti, e la sonificazione le rende udibili.

Spettacolare nella sua progettazione e realizzazione è stato il concerto “Listening to the Mind Listening”, organizzato all'interno della conferenza internazionale ICAD⁷ a Sidney (Australia) l'estate scorsa. Qui anche la procedura è stata mutuata da quelle cui è adusa la comunità scientifica: è stato pubblicato un “*call for music*”, proponendo di sonificare un certo insieme di dati numerici, uguale per tutti i musicisti che partecipavano. Il titolo stesso del concerto *Listening to the Mind Listening* è oltre che suggestivo, preciso: i dati provenivano dall'encefalogramma di una ricercatrice, opportunamente cablata con 16 sensori mentre ascoltava un brano musicale. I compositori hanno inviato le loro sonificazioni, ed un ampio comitato di referee anonimi è stato chiamato a giudicarle e descriverle minuziosamente, come di prassi nelle riviste scientifiche. Il brano, rivelato agli autori come al pubblico ed al comitato solo alla fine del concerto, era la canzone *Can't get you out of my head*, di Kylie Minogue, audio: <http://www.rathergood.com/kylie/>. I 10 brani prescelti sono stati suonati in uno spettacolare concerto all'Opera House di Sidney, e brevi estratti delle sonificazioni si possono trovare a:

<http://www.icad.org/websiteV2.0/Conferences/ICAD2004/concert.htm>, da cui si può risalire al convegno, i suoi programmi di conferenze, le tematiche alla frontiera della ricerca nell' auditory display.

Note e riferimenti bibliografici

¹ Regia di Hamilton Luske, 1959.

² Prima per quanto riguarda la nostra cultura. Per altre, si veda ad esempio, Tran Quang Hai, "I numeri nella musica asiatica", in M. Emmer (a cura di), *Matematica e cultura 2000*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2000.

³ Questa misurabilità molti secoli dopo è stata riportata alla struttura delle vibrazioni di una corda tesa, e quindi alle loro frequenze fondamentali.

⁴ È per questo che l' accordatura dei pianoforti è affidata a professionisti che per equilibrare gli errori, prendono decisioni non algoritmiche, in base al suono del singolo strumento.

⁵ Versione inglese: H. Helmholtz, *On the Sensation of Tone*, Dover, 1950.

⁶ A.J. Ellis, "Tonometrical Observations on some existing non-harmonic Scales", *Proc. Of the R. Society*, 1884. A.J. Ellis, "On the Musical Scales of Various Nations", *Journal of the Society of Arts*, 1885.

⁷ International Conference on Audio Display.

Autore

Laura Tedeschini Lalli, docente di Fisica Matematica, Università Roma Tre. General Convenor dell'associazione European Women in Mathematics. Matematica: si occupa di Sistemi Dinamici Caotici. Laurea in Matematica all'Università di Roma con Giovanni Gallavotti, Ph.D. in Matematica Applicata da Jim A. Yorke, Dept. of Mathematics Univ. of Maryland – College Park. Musica: ha studiato Composizione al Conservatorio di S. Cecilia, sotto la guida di Boris Porena. Il Ph.D. in Matematica Applicata vedeva come settore di applicazione Teorie Musicali, presso il Dept. of Music, adviser T. De Lio. Come si vede da questa breve biografia, dai lunghi studi musicali ha mutuato e ritenuto l'abitudine dei musicisti a dichiarare i propri Maestri, lasciando ad altri di descrivere le profonde influenze che certamente hanno avuto. Ha avuto il privilegio di lavorare con etnomusicologi come Mantle Hood, che la hanno introdotta alla prospettiva interculturale, e con fisici teorici come Francesco Guerra, con un programma di ricerca sui sistemi sonici come Sistemi Complessi. tedeschi@mat.uniroma3.it